16. Републичко такмичење из математике ученика медицинских школа

Пожаревац, 19. април 2024.

I разред - Решење

1. $$\frac{8\frac{1}{5}-1\frac{8}{15}}{(5,25-4,05):3} : \frac{1,25}{0,64-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{41}{5}-\frac{23}{15}}{1,2:3} : \frac{\frac{5}{4}}{\frac{64}{100}-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{123-23}{15}}{0,4} : \frac{\frac{5}{4}}{\frac{64-4}{100}} = \frac{\frac{100}{15}}{\frac{2}{5}} : \frac{\frac{5}{4}}{\frac{60}{100}} = \frac{500}{30}\cdot\frac{240}{500} = 8$$

   Тачан одговор: Б. [8]

2. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leqslant 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leqslant x-1 \leqslant 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\} = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

   $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\} = \{2,4,6,\dots\}$

   $A \setminus B = \{-2,-1,0,1,3\}$

   Збир елемената скупа $A \setminus B$ је $-2+(-1)+0+1+3=1$.

   Тачан одговор: А. [8]

3. $$\left(\frac{6}{a-b}+\frac{6a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right) : \frac{4a+2b}{a^2+2ab+b^2} = \left(\frac{6}{a-b}+\frac{6a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{4a+2b} =$$

   $$= \frac{6(a+b)+6a}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{4a+2b} = \frac{6(2a+b)}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2(2a+b)} = \frac{3(a+b)}{a-b}$$

   Тачан одговор: Г. [9]

4. x - цена улазнице за музеј за одрасле

   $10\cdot 0,3x + 32\cdot 0,5x + 2x + 2100 = 10500$

   $3x + 16x + 2x = 8400$

   $21x = 8400 \quad \Rightarrow \quad x = 400$ динара

   Цена улазнице за децу млађег узраста је $0,3x = 0,3\cdot 400 = 120$ динара.

   Тачан одговор: А. [9]

5. I начин (геометријски приступ)

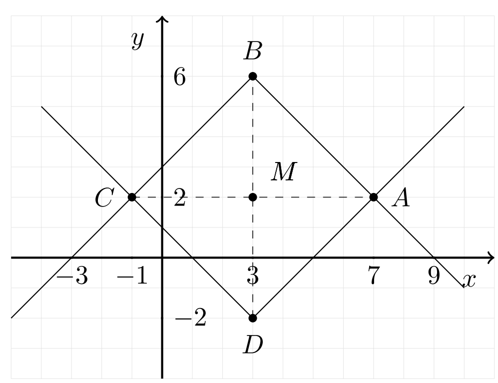
   Скицирањем графика функција

   $$f(x) = 6-|x-3| = \begin{cases} 9-x & \text{за} \quad x \geqslant 3 \\ x+3 & \text{за} \quad x < 3 \end{cases}$$

   и

   $$g(x) = |3-x|-2 = \begin{cases} x-5 & \text{за} \quad x \geqslant 3 \\ 1-x & \text{за} \quad x < 3 \end{cases}$$

   уочава се да дијагонале квадрата леже на правама $x=3$ и $y=2$. Дакле, пресек дијагонала формираног квадрата има координате $M=(3,2)$, па је $a-b=3-2=1$.



   II начин (аналитички приступ)

   У задатку је наведено да графици функција $f(x)$ и $g(x)$ одређују квадрат. То је могуће само у случају да се два наспрамна темена квадрата налазе у тачкама у којима функције мењају монотоност. За функцију $f(x)$ тачка у којој мења монотоност је тачка $B=(3,6)$, док је за функцију $g(x)$ то тачка $D=(3,-2)$. То су наспрамна темена квадрата, па се пресек дијагонала налази на средини дужи BD, односно тачка M има координате $M=(3,2)$ које задовољавају $a-b=3-2=1$.

   Тачан одговор: В. [10]

6. $\dfrac{4x-16}{x-5}<3 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{4x-16}{x-5}-3<0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x-1}{x-5}<0$

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
R	$+$	0	$-$	$\times$	$+$

Скуп свих решења неједначине је $(1,5)$.

Тачан одговор: А. [10]

7. x - количина легуре са 90% чистог сребра, y - количина легуре са 70% чистог сребра

$0,9\cdot x+0,7\cdot y=0,75\cdot(x+y) \quad\Rightarrow\quad 15\cdot x=5\cdot y \quad\Rightarrow\quad x:y=5:15=1:3$

Тачан одговор: Б. [11]

8. $4+|x-8|=|x-4|, \qquad |x-8|=\begin{cases} x-8 & \text{за} \quad x\geqslant 8\\ -x+8 & \text{за} \quad x<8\end{cases} \qquad \text{и} \qquad |x-4|=\begin{cases} x-4 & \text{за} \quad x\geqslant 4\\ -x+4 & \text{за} \quad x<4\end{cases}$

I случај: $x\geqslant 8 \quad\Rightarrow\quad 4+x-8=x-4 \quad\Rightarrow\quad 0=0$

(ова једначина је увек тачна тако да је и полазна једначина тачна за свако $x\geqslant 8$)

II случај: $4\leqslant x<8 \quad\Rightarrow\quad 4-x+8=x+4 \quad\Rightarrow\quad x=8$ (не припада интервалу па није решење)

III случај: $x<4 \quad\Rightarrow\quad 4-x+8=-x+4 \quad\Rightarrow\quad 8=0$ (једначина нема решења)

Дакле, једначина је задовољена за свако $x\geqslant 8$, тј. има бесконачно много решења.

Тачан одговор: Г. [11]

9. Како први радник може сâм да заврши планирани посао за 20 дана, то значи да за један дан овај радник уради $\dfrac{1}{20}$ посла. Други радник исти посао може сâм да заврши за 30 дана, па закључујемо да за један дан може урадити $\dfrac{1}{30}$ посла. Означимо са x време потребно да трећи радник сâм уради исти посао. Тада важи

$$2\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)+6\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{x}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot\frac{5}{60}+6\cdot\frac{5}{60}+6\cdot\frac{1}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad 6\cdot\frac{1}{x}=1-\frac{40}{60} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

Дакле, трећи радник би сâм завршио посао за 18 дана.

Тачан одговор: Б. [12]

10. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{bc+ca+ab}{abc}=0 \quad\Rightarrow\quad bc+ca+ab=0$

$$\frac{a^2-bc}{a^2}+\frac{b^2-ca}{b^2}+\frac{c^2-ab}{c^2}=1-\frac{bc}{a^2}+1-\frac{ca}{b^2}+1-\frac{ab}{c^2}=3-\frac{(bc)^3+(ca)^3+(ab)^3}{a^2b^2c^2}$$

I начин: Изражавањем једног сабирка (нпр. ab) из услова $bc+ca+ab=0$ добијамо $ab=-bc-ca$

$$3-\frac{(bc)^3+(ca)^3+(ab)^3}{a^2b^2c^2}=3-\frac{(bc)^3+(ca)^3+(-bc-ca)^3}{(-bc-ca)^2c^2}=3-\frac{(bc)^3+(ca)^3-(bc)^3-3(bc)^2\cdot ca-3bc\cdot(ca)^2-(ca)^3}{(-bc-ca)^2c^2}=$$
$$=3-\frac{-3ab^2c^3-3a^2bc^3}{(-bc-ca)^2c^2}=3-\frac{3abc^2(-bc-ca)}{(-bc-ca)^2c^2}=3-\frac{3ab}{-bc-ca}=3-3=0$$

II начин: Коришћењем идентитета $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+y^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$$3-\frac{(bc)^3+(ca)^3+(ab)^3}{a^2b^2c^2}=3-\frac{(bc+ca+ab)((bc)^2+(ca)^2+(ab)^2-bc\cdot ca-ca\cdot ab-ab\cdot bc)+3\cdot bc\cdot ca\cdot ab}{a^2b^2c^2}=$$
$$=3-\frac{3a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}=3-3=0$$

Тачан одговор: А. [12]

16. Републичко такмичење из математике ученика медицинских школа

Пожаревац, 19. април 2024.

II разред - Решење

1. Исти као 3. задатак за I разред. Тачан одговор: А. [8]

2. Исти као 4. задатак за I разред. Тачан одговор: Г. [8]

3. Исти као 7. задатак за I разред. Тачан одговор: А. [9]

4. $f(x)=\sqrt[3]{2-x}, \quad g(x)=x^3+2$

   $g(f(x))-f(g(x))=g\left(\sqrt[3]{2-x}\right)-f(x^3+2)=\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3+2-\sqrt[3]{2-(x^3+2)}=2-x+2-\sqrt[3]{-x^3}=4-x+x=4$

   Тачан одговор: Б. [9]

5. Исти као 10. задатак за I разред. Тачан одговор: В. [10]

6. Исти као 9. задатак за I разред. Тачан одговор: Г. [10]

7. $$\frac{\sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{21-2\sqrt{20}}}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{(\sqrt{20}-1)^2}}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{20}-1}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=$$

   $$=\frac{\sqrt{4+\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt[4]{5}$$

   Тачан одговор: Б. [11]

8. Прво испитујемо за које вредности параметра $m\in\mathbb{R}$ квадратна једначина $x^2-mx+2m-3=0$ има реалних решења ($D\geqslant 0$).

   $D=(-m)^2-4\cdot(2m-3)=m^2-8m+12=(m-2)(m-6)\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad m\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$

   Даље проверавамо за које вредности параметра $m\in\mathbb{R}$ је збир $x_1^2+x_2^2=3$. Из Виетових формула за дату квадратну једначину знамо да је $x_1+x_2=m$ и $x_1x_2=2m-3$.

   $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2\cdot(2m-3)=m^2-4m+6=3$

   Из овог услова добијамо квадратну једначину $m^2-4m+3=0$, која има решења $m_1=1$ и $m_2=3$. За $m_2=3$ полазна једначина нема реалних решења, тако да ово решење одбацујемо. Дакле, услови су испуњени за $m=1\in(-6,2)$.

   Тачан одговор: В. [11]

9. За свако $x\in\mathbb{R}$ важи да је $x^2+2x+2>0$ ($a=1>0$, $D=4-8=-4<0$) и $x^2+x+1>0$ ($a=1>0$, $D=1-4=-3<0$), па множењем неједначине са $(x^2+2x+2)(x^2+x+1)$ не утичемо на знак неједнакости, као ни на област решења. Дакле

   $$\frac{x+a}{x^2+2x+2}<\frac{x}{x^2+x+1} \quad\Leftrightarrow\quad (x+a)(x^2+x+1)<x(x^2+2x+2) \quad\Leftrightarrow\quad (a-1)x^2+(a-1)x+a<0.$$

   За $a=1$ последња неједнакост није тачна ни за једно x (добија се $1<0$). Ако је $a\neq 1$ неједнакост $(a-1)x^2+(a-1)x+a<0$ важи за свако $x\in\mathbb{R}$ ако и само ако је $a-1<0$ и $D=(a-1)^2-4a(a-1)==(a-1)(-3a-1)<0$. Односно, ако и само ако је $a<1$ и $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$. Одавде добијамо да је тражени услов $a<-\frac{1}{3}$.

   Тачан одговор: Б. [12]

10. $$\frac{1+\operatorname{tg}^2(90^\circ-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(90^\circ-\alpha)+1}=\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}=\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+1}=\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\operatorname{ctg}^2\alpha$$

    Тачан одговор: В. [12]

16. Републичко такмичење из математике ученика медицинских школа

Пожаревац, 19. април 2024.

III разред - Решење

1. Исти као 3. задатак за I разред. Тачан одговор: В. [8]

2. Исти као 4. задатак за II разред. Тачан одговор: Б. [8]

3. Исти као 9. задатак за I разред. Тачан одговор: В. [9]

4. Исти као 10. задатак за I разред. Тачан одговор: Б. [9]

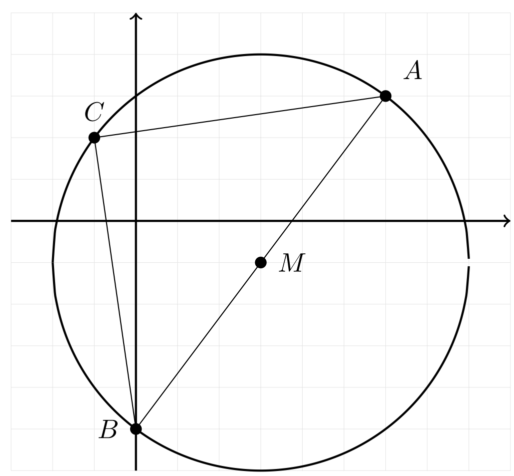
5. $\left(\dfrac{3}{3^x}\right)^x > \dfrac{3^x}{81} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3^{1-x}\right)^x > 3^{x-4} \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)x > x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2,2).$
   Тачан одговор: А. [10]

6. Исти као 9. задатак за II разред. Тачан одговор: Г. [10]

7. $\sqrt{x^2-5x+10} = 8-2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5x+10 = (8-2x)^2 \quad$ и $\quad 8-2x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-27x+54=0 \quad$ и $\quad x \leqslant 4$
   Квадратна једначина има решења $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$. Како само прво решење задовољава услов $x \leqslant 4$, то дата једначина има једно позитивно решење.
   Тачан одговор: Б. [11]

8. $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}(1-\cos^2 x) + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$
   $t = \cos x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{2} \quad$ или $\quad t_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   Случај $\cos x = \sqrt{2} > 1$ нема решења. У другом случају, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, решења су $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ и $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. На интервалу $(0, 2\pi)$ постоје 2 решења, $\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$, тако да на интервалу $(0, 2024\pi)$ једначина има 2024 решења.
   Тачан одговор: А. [11]

9. Коефицијент правца праве која садржи тачке $A = (6,3)$ и $C = (-1,2)$ је $k_{AC} = \dfrac{3-2}{6-(-1)} = \dfrac{1}{7}$, док је коефицијент правца праве која садржи тачке $B = (0,-5)$ и $C = (-1,2)$ једнак $k_{BC} = \dfrac{-5-2}{0-(-1)} = -7$. Како важи да је $k_{AC}k_{BC} = -1$ следи да су поменуте праве ортогоналне, односно да је троугао ABC правоугли са правим углом код темена C. Кружница која садржи тачке A, B и C је кружница описана око правоуглог троугла ABC, те се њен центар налази на средини хипотенузе AB и има координате $M = (3,-1)$. Дакле, координате центра припадају правој $x + 2y - 1 = 0$.
   Тачан одговор: А. [12]



10. $(\log_3 x)^2 - (\log_3 7)(\log_7 x) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$
   $(\log_3 x)^2 - \dfrac{\log_7 x}{\log_7 3} - 2 = 0$
   $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$
   $t = \log_3 x \quad \Rightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2 \quad$ или $\quad t_2 = -1$
   За $\log_3 x = 2$ добијамо решење $x_1 = 9$, док за $\log_3 x = -1$ добијамо решење $x_2 = \frac{1}{3}$. Оба решења су позитивна и њихов производ је једнак 3.
   Тачан одговор: Г. [12]

16. Републичко такмичење из математике ученика медицинских школа

Пожаревац, 19. април 2024.

IV разред - Решење

1. Исти као 9. задатак за I разред. Тачан одговор: А. [8]

2. Исти као 3. задатак за I разред. Тачан одговор: В. [8]

3. Исти као 7. задатак за III разред. Тачан одговор: Б. [9]

4. Исти као 5. задатак за III разред. Тачан одговор: Г. [9]

5. Исти као 8. задатак за III разред. Тачан одговор: Г. [10]

6. Исти као 9. задатак за III разред. Тачан одговор: Б. [10]

7. У развоју бинома $\left(x^2+2x\right)^{11}$, $(k+1)$ члан је једнак $T_{k+1}=\binom{11}{k}(x^2)^{11-k}(2x)^k=\binom{11}{k}2^k\cdot x^{22-k}$. Да би овај члан садржао x^{20} мора бити $22-k=20$, тј. $k=2$. Дакле, у питању је трећи члан који је једнак
$T_3=\binom{11}{2}2^2x^{20}=\dfrac{11\cdot 10}{2}\cdot 4\cdot x^{20}=220x^{20}$.
Тачан одговор: В. [11]

8. Функција $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ је дефинисана за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{за} \quad x>0\\ -1 & \text{за} \quad x<0\end{cases}$
Функција $f_2(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$ за свако $x\in\mathbb{R}$.
Функција $f_3(x)=\dfrac{\log_2 2^x}{x}=1$, али је дефинисана за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Функција $f_4(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{x}=1$, и такође је дефинисана за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Дакле, једнаке су само функције f_3 и f_4.
Тачан одговор: В. [11]

9. Исти као 10. задатак за III разред. Тачан одговор: В. [12]

10. У првом кругу даривања поклоњено је $8\cdot 2=16$ књига. У другом кругу даривања свака особа која је добила књигу у првом кругу поклања две нове књиге двема новим особама, дакле у другом кругу је поклоњено $16\cdot 2=32$ књиге. У сваком наредном кругу се број поклоњених књига добија множењем са 2. Даривање се може описати геометријским низом са количником $q=2$ и првим чланом $a_1=16$. Укупан број поклоњених књига је збир геометријског низа од n елемената. Укупно 496 књига поклоњено је после

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}=16\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=496 \quad\Rightarrow\quad 2^n-1=31 \quad\Rightarrow\quad 2^n=32 \quad\Rightarrow\quad n=5 \text{ кругова даривања.}$$

Тачан одговор: Б. [12]